Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009/10
KOLOKWIUM 2

14 stycznia 2010

Zadanie 1. Niech f_n będzie dowolnym ciągiem funkcji nieujemnych mierzalnych. Udowowdnij, że zachodzi nierówność

$$\int \inf_n f_n \, d\mu \leq \inf_n \int f_n \, d\mu.$$

ROZW. Po prostu tak: $\forall_n \ \inf f_n \leq f_n \implies \forall_n \int \inf f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \implies \int \inf f_n d\mu \leq \inf \int f_n d\mu$. Koniec.

Zadanie 2. Korzystając z Twierdzenia Fubiniego wykaż, że dla dowolnej funkcji nieujemnej f na przestrzeni miarowej (X, μ) mamy

$$\int f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\{x : f(x) \geq t\} \, dt$$

(ostatnia całka jest względem miary Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$).
Wskazówka: Aby stosować tw. Fubiniego potrzebna jest funkcja dwóch zmiennych, x i t. Bez tego ani rusz! Trzeba, patrząc na wykres funkcji f, sprytnie zdefiniować pomocniczą funkcję $g(x,t)$ na $X \times [0, \infty)$.
ROZW. Definiujemy

$$g(x,t) = \begin{cases} 1, & gdy \ f(x) \geq t \\ 0, & gdy \ f(x) < t \end{cases}.$$

Funkcja ta jest NIEUJEMNA, wiec calka po mierze produktowej ma sens, zatem obie calki iterowane są równe.

$$\int \left(\int_0^\infty g(x,t) \ dt \right) \ d\mu(x) = \int \left(\int_0^{f(x)} 1 \ dt \right) \ d\mu(x) = \int f(x) \ d\mu(x) = \int f \ d\mu.$$

Natomiast po zamianie dostaniemy

$$\int_0^\infty \left(\int g(x,t) \ d\mu(x) \right) \ dt = \int_0^\infty \mu\{x : f(x) \geq t\} \ dt.$$

Zatem prawe strony obu powższych równań są sobie równe.

Zadanie 3. Dana jest miara μ i funcja nieujemna f. Rozważmy dwie miary: $d\nu = f d\mu$ oraz $d\xi = f^2 d\mu$. Wykazać, że miary ν i ξ są równoważne (tzn. $\nu \ll \xi$ i $\xi \ll \nu$) i znaleźć pochodne Radona-Nikodyma $\frac{d\xi}{d\nu}$ oraz $\frac{d\nu}{d\xi}$.
Uwaga, jest maleńki haczyk przy tej drugiej gęstości: może w niektórych punktach wyjść $\frac{1}{0}$, co z tym zrobić?

ROZW.: ...

Zadanie 4. Dane są trzy miary μ, ν, ξ (na tym samym sigma-ciele), a między nimi takie oto zależności: $\mu \perp \nu$, $\xi \ll \mu$. Udowodnij, że $\xi \perp \nu$.

ROZW.: Jeśli $\mu \perp \nu$ i D jest taki, że $\mu(D) = \nu(D^c) = 0$ i $\xi \ll \mu$, to $\xi(D) = 0$ co daje $\xi \perp \nu$. Jeśli teraz $\xi \ll \nu$, to $\xi \equiv 0$ (tylko miara zerowa jest jednocześnie singularna i absolutnie ciągła względem innej miary). No odwrót: Załóżmy, że $\nu \not\perp \mu$. Rozłóżmy $\nu = \nu_1 + \nu_2$ tak, że $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$. Jeśli $\nu_1 \equiv 0$, to $\nu = \nu_2 \perp \mu$, a tak nie jest. Czyli $\nu_1 \not\equiv 0$, $\nu_1 \ll \mu$ i oczywiście $\nu_1 \ll \nu$. Czyli kładziemy $\xi = \nu_1$ i mamy zaprzeczenie warunku z zadania.

Zadanie 5. Dana jest funkcja $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, która jest niemalejąca, $g(0) = 0$, i spełnia warunek Lipshitza, tzn. istnieje stała $c > 0$ taka, że $|g(x) - g(y)| \le c|x - y|$. Korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma oraz wiadomości o dystrybuantach, wykaż, że g jest postaci

$$g(t) = \int_{(0,t]} f(x)\, d\lambda(x)$$

dla pewnej nieujemnej funkcji mierzalnej $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, gdzie λ oznacza miarę Lebesgue'a.
Wskazówka: To jest piękne zadanie, jednak wieloetapowe. Najpierw trzeba zauważyć, że g jest dystrybuantą pewnej miary μ, a następnie, korzystając z warunku Lipshitza pokazać, że miara ta jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Może tu się przydać regularność miary Lebesgue'a. W ostatnim etapie trzeba skorzystać z twierdzenia Radona-Nikodyma.

ROZW.: Jak wiemy, taka funkcja g jest dystrybuantą pewnej miary borelowskiej μ na $[0, \infty)$. Pokażemy, że miara ta jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. To, w połączeniu z tw. R-N da istnienie funkcji gęstości R-N, którą właśnie oznaczymy przez f. Wtedy będziemy mieć: (najpierw korzystamy z def. dystrybuanty, potem z def. gęstości)

$$g(t) = \mu((0, t]) = \int_{(0,t]} f(x)\, d\lambda(x).$$

No więc pokazujemy tą absolutną ciągłość: Weźmy zbiór A miary Lebesgue'a zero. Z regularności miary istnieje zbiór otwarty $U \supset A$ taki, że $\lambda(U) < \epsilon$. Wiemy z topologii, że zbiór U jest przeliczalną rozłączną sumą przedziałów otwartych $U = \bigcup_n (a_n, b_n)$. Z definicji dystrybuanty, $\mu((a_n, b_n)) \le \mu((a_n, b_n]) = g(b_n) - g(a_n)$. Z warunku Lipshitza, $g(b_n) - g(a_n) \le c(b_n - a_n) = c\lambda((a_n, b_n))$. Zatem $\mu(U) \le c\lambda(U) < c\epsilon$. Stąd $\mu(A) < c\epsilon$. Ponieważ ϵ jest dowolny, wyszło $\mu(A) = 0$. Koniec.

T.D.